

自由落下と非慣性系における運動方程式

目次

1 無重力	2
2 加速度計は重力加速度を測れない	3
3 重量は質量と同じ数値で、kg が使える	4
4 慣性系における運動方程式	5
5 非慣性系における運動方程式	7
6 見かけの力.....	8
7 慣性系には実在する慣性力があるか.....	8

1 無重力

(1) 非慣性系の住人は無重力を体感できる

(a) 並進的な加速度運動をしている非慣性系の住人

- ① 重力加速度と同じ加速度で地球中心に向かって落下している非慣性系(思考実験で自由落下しているエレベータなど)を考える。
- ② 非慣性系自身が加速度運動しているので、そこから見える物体は全て逆方向の加速度で運動しているように見える。見かけの力「並進的な加速度運動による慣性力」が物体に作用しているように見えるのである。
- ③ 非慣性系が見る物体には重力が作用しているので、この慣性力とつり合う。
- ④ 従って、このような非慣性系の中では無重力状態となる。

(b) 回転運動している非慣性系の住人

- ① 人工衛星のように重力を向心力として地球周回している物体を地球中心から見たときの線(視線)と一緒に回転している非慣性系を考える。
- ② 人工衛星には見かけの力「遠心力」が働いているように見え、重力とつり合う。
- ③ 従って、このような非慣性系の中では無重力状態となる。

(c) 感覚的無重力

- ① 自由落下している閉じた箱に入った人は、身体すべての部分が同じ加速度で運動するので少しもストレス(力の作用)を感じない。
- ② 周りの物体も同じようにフワフワ宙に浮いて傍から離れず、箱の床や壁に押されることも無い。
- ③ 箱が透明だったら、地球との距離が加速度的に近づくのが見えるが、地球の方が動いていると感ずるだろう。
- ④ 人間の感覚としてはこのようなものだろうが、力学的な説明にはならない。

(2) 摩擦の無い板に物体を乗せ、摩擦の無い水平面で加速度運動させる。

(a) 板と物体を同じ加速度で運動させる

- ① 板と物体が等しい加速度で運動するよう、それぞれに加える外力が制御されるものとする、板(非慣性系)から見た物体は静止して見える。
- ② 物体に加えた力と慣性力が釣り合っていて、物体には外力が作用していない(無外力)のと等しい状態である。
- ③ この状態は自由落下と同様。
- ④ ただし、物体が人なら外力で押されていることを感ずる。

(b) 質点と柔軟構造物

- ① 剛体の並進運動は質点の運動で表される。
- ② 質点ならば、上記(1)項の自由落下も(2)-(a)項の場合も鉛直と水平の違いはあるが、どちらも非慣性系から見て力が作用しない同様な運動である。
- ③ 人が無重力状態を感ずるのは柔軟構造物だからで、(2)-(a)項で外力を感ずるのも人が柔軟構造物だからである。

(c) このように、無重力は柔軟構造物の人間の感覚であり、剛体では無重力も(2)-(a)項の「無外力」も同じで区別できない。

(3) 慣性系の住人は無重力を体感できるか

(a) 非慣性系は云わば虚構・虚像の世界のようなもので、現実・実像の世界は慣性系である。慣性系の住人は無重力を体感できるのだろうか？

(b) 慣性系の住人は無重力を体感できない

① 慣性系の住人が無重力を体感しようと自由落下を始めると、途端に非慣性系に強制移住させられてしまう。

② 宇宙はどこでも重力が働いているので、宇宙のどこにも慣性系は存在しない。だが、私たちは頭の中に慣性系を真実の世界として創造することができる。

(c) 慣性系に居て無重力が体感できないなら、自由落下している物体を慣性系で観察したらどうなるか？ 筆者の持論であるが、次の(4)項に示したように、慣性系にも無重力はあると考える。

(4) 慣性系の住人は無重力を体感できない、それでも無重力はある

(a) 重力場は中心力場である。中心力とは、大きさが原点からの距離のみに依存し、方向が原点と物体を結ぶ方向に沿った力。

(b) 中心力場では力学的エネルギー（運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和）及び角運動量が保存される。

(c) 力学的エネルギーが保存されるとは、通常の力場では力の作用が無くて、等速直線運動（静止含む）している状態である。

(d) 自由落下は、重力場（中心力場）において、重力（中心力）のみが作用して加速度運動している状態である。

(e) しかし、重力場では力学的エネルギーが保存されるので、等速直線運動（静止含む）している状態と区別できない（等価）。

(f) 従って、重力が無いのと区別できない（等価）。

(g) よって自由落下している物体は重力で加速度運動していても、無重力状態になる。

(h) 実際に、人口衛星には重力が作用しているし、楕円運動しているのに力学的エネルギー（軌道エネルギー）が保存される。

（注）等価原理は、[A がBと区別できない]だけで、[Bである]という意味ではない。

2 加速度計は重力加速度を測れない

(1) 宇宙機に搭載した加速度計は、本体（ケース）に振り子を吊るした簡単なモデルで表すことができる。

(2) 宇宙機に力（重力除く）が作用すると、ケースは宇宙機とともに加速度運動するが、振り子は慣性の法則に従って置いてけぼり状態になる。このためケースと振り子の間に相対的変位が生じるので、これを利用して加速度を知ることができる。

(3) 重力の場合、ケースと振り子に一樣に作用し、ケースと振り子が等しい加速度で運動して相対的変位が生じないので、重力加速度は測れない。

(4) 別の説明として、自由落下では無重力状態となるので重力加速度は測れない、ともい

える。

- (5) 上記は慣性系での話。非慣性系(地上)では測れる(国土地理院が測定している)。ただし、真空中を自由落下する物体の加速度を地上で計測するので、地球の自転の影響を含んだ重力である。

3 重量は質量と同じ数値で、kg が使える

(1) 質量

質量は物体に固有の物理量である。

(2) 重量

- (a) 定義上、重量は物体が置かれた場所の重力加速度に依存し、質量と置場所の重力加速度の積 $m \cdot g^*$ で表される。秤は自由落下できない天体表面に置いて重量計測するので、重力加速度 g^* は天体表面におけるものである。実際は下記(3)項及び(4)項に示すように、重力加速度 g^* の場所による変異の影響は受けない。
- (b) 地表面上の重力加速度 g^* は下記の要因で場所によって異なる。
- ① 地球形状の影響
地球は詳細に見ると球ではなく、洋ナシのような形状をしている。
 - ② 重力異常
地下構造の違いによって密度にばらつきがある。
 - ③ 地球自転による遠心力の作用
自転軸から地表面までの距離(回転半径)が緯度によって異なる。
 - ④ 高度／深度
重力は地球中心からの距離の 2 乗に逆比例する。
- (c) 慣性系における $m \cdot g$ は重力(万有引力)である。地表面上での $m \cdot g^*$ は重量であるが、非慣性系での重力ともいえる。
- (d) 重量は「力」であり、単位は[N、ニュートン]あるいは[kgf、kg 重]である。

(3) 秤で量る重量は、実は質量

- (a) 重量を測るにはまず、秤に基準分銅、例えば質量 10kg を乗せ、目盛が 10kg を指し示すように較正しておく。秤を別の場所に移動すると重力加速度が異なるので、精密に計測する必要があるときは移動する度に較正する。このように較正された秤に物体を乗せ、例えば目盛が 5kg と指せば、その物体の重量は 5kg であり、質量も 5kg である。
- (b) このようにすることで重量は質量と同じ数値になり、重量の単位も質量と同じ単位 kg が使用される。基準分銅さえ正確ならば、どこに持って行っても、重力加速度の変異に影響されず正確に測れる。
- (c) このように、秤で量っている重量は実質、質量である。
- (d) よって、物の「重さ軽さ」を表す物理量として使われる「重さ」や「重量」は、実際には「質量」を指す。

(e) 「力」として扱う場合は「重力」と呼んで、「重さ」や「重量」とは区別してあいまいさを無くす必要がある。

(4) 日常使う重さとは

(a) 定義の上では重量は力の単位を持つが、質量と区別せずに用いることができる。ちなみに、工学系で過去に使っていた工学単位は、例えば質量 5kg の物体が秤を押す力は 5kgf であり、重量は 5kg である。この秤に力を加えて目盛が 5kg を指せば、加えた力は 5kgf である。なお、SI 単位系では 5kgf は $5 \times g = 5 \times 9.80665\text{N}$ である。

(b) 重量は質量と同様の「重さ軽さ」としての面を持っており、上記のように kg で表す。体重を秤で量って 50kg の人は質量 50kg である。

(c) 「力」としてみた場合の重量 $w = m \cdot g^*$ は、秤で量った数値が g^* の掛からない m の数値なので、SI 単位系では標準重力加速度 ($g = 9.80665\text{m/s}^2$) を乗じて $[\text{N}]$ に変換する。

(d) このように、重量は「重さ軽さ」としては $m[\text{kg}]$ であり、「力」としては $m \cdot g[\text{N}]$ なので、上記(2)-(b)項に示した場所による重力加速度の変異の影響は全くない。

(e) ただし、力センサなら重力加速度の場所による変異の影響を受けた「力」が測れる。

(f) 発射時重量(w)が 100 トンのロケットは、推力(F)が 110 トン f なら加速度が下記となり、重力に打ち勝って上昇する。

$$a = \frac{F}{m} - g = \frac{110 \times 1000 \times g}{100 \times 1000} - g = 0.1g \quad \dots\dots\dots(3-1)$$

4 慣性系における運動方程式

物体の運動は、非慣性系における物体の動きを慣性系で観察して求めることができる。図 4-1 に示したように、慣性系 ($O-X-Y-Z$) における物体の位置は、非慣性系 ($o-e_r-e_\theta-e_\omega$) を用いて下記のように表される。非慣性系は原点(o)が慣性系に対して並進運動し、原点(o)回りに回転する座標系とする。

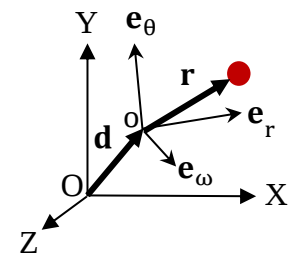


図 4-1 物体の位置

$$\mathbf{R} = \mathbf{d} + \mathbf{D}_R^I \cdot \mathbf{r}$$

ここで、 $\mathbf{R}$: 慣性座標系 (I) における物体の位置ベクトル

$\mathbf{d}$: 慣性座標系 (I) における回転座標系 (R) 原点の位置ベクトル

$\mathbf{r}$: 回転座標系 (R) における物体の位置ベクトル

$\mathbf{D}_R^I$: 慣性座標系 (I) における回転座標系 (R) の方向余弦行列

上記を 2 回微分して

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_R^I \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{D}_R^I \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ &= \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_R^I \cdot [\boldsymbol{\omega} \times] \cdot \mathbf{r} + \mathbf{D}_R^I \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ &= \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_R^I \cdot (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_R^I \cdot (\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \mathbf{D}_R^I \cdot (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})$$

$$\begin{aligned}
&= \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_R^I \cdot [\boldsymbol{\omega} \times] \cdot (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{D}_R^I \cdot (\ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) \\
&= \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_R^I \cdot \{\boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}\} \\
&= \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{D}_R^I \cdot \{\ddot{\mathbf{r}} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}\} \cdots \cdots \cdots (4-1)
\end{aligned}$$

ここで、 $\dot{\mathbf{R}}$: 慣性座標系 (I) における物体の速度ベクトル

$\ddot{\mathbf{R}}$: 慣性座標系 (I) における物体の加速度ベクトル

$\dot{\mathbf{d}}$: 慣性座標系 (I) における回転座標系 (R) 原点の速度ベクトル

$\ddot{\mathbf{d}}$: 慣性座標系 (I) における回転座標系 (R) 原点の加速度ベクトル

$\dot{\mathbf{r}}$: 回転座標系 (R) における物体の速度ベクトル

$\ddot{\mathbf{r}}$: 回転座標系 (R) における物体の加速度ベクトル

$\boldsymbol{\omega}$: 回転座標系 (R) の回転角速度ベクトル

$\dot{\boldsymbol{\omega}}$: 回転座標系 (R) の回転角加速度ベクトル

また、 $\dot{\mathbf{D}}_R^I = \mathbf{D}_R^I \cdot [\boldsymbol{\omega} \times]$: 方向余弦行列の微係数

$$[\boldsymbol{\omega} \times] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} : \text{回転角速度ベクトルの歪対称行列}$$

$[\boldsymbol{\omega} \times] \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$: 歪対称行列とベクトルの積はベクトルの外積になる

簡単な例として、慣性系で等速円運動する物体の運動方程式を示す。円運動は回転座標系を用いて導出するのが便利である。図 4-2 に示したように、(平面、2 次元) 極座標系は物体の動径 $\mathbf{r}$ と回転角 θ で表される回転座標系 $(\mathbf{r}, \theta)$ で、回転半径 r で物体を振り回すイメージである。これを直交系で表した回転座標系 (R) を $(\mathbf{O} - \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta)$ とする (回転軸 $\mathbf{e}_\omega$ は省略)。

ここで、 $\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$: 動径方向の単位ベクトル

$\mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$: 接線方向の単位ベクトル

$\mathbf{D}_R^I = (\mathbf{e}_r \ \mathbf{e}_\theta)$: 慣性座標系 (I) に対する回転座標系 (R) の方向余弦行列

原点を同じにとった慣性座標系 (I) を $(\mathbf{O} - \mathbf{X} - \mathbf{Y})$ とすると (平面極座標に合わせて軸 Z は省略)、等速円運動では慣性座標系に対する回転座標系の回転は $(\boldsymbol{\omega} = \text{一定}, \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0)$ で、回転座標系に対する物体の運動は $(\mathbf{r} = \text{一定}, \dot{\mathbf{r}} = 0, \ddot{\mathbf{r}} = 0)$ なので、式 (4-1) は次のように表される。

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{D}_R^I \cdot \{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\} \cdots \cdots \cdots (4-2)$$

式 (4-2) は、慣性座標系では向心力のみが観測されることを示している。これを展開すると下記のように表される (式導出の都合上、3 次元で表現)。

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}} &= (\mathbf{e}_r \ \mathbf{e}_\theta \ \mathbf{e}_\omega) \cdot \{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\} \\
&= (\mathbf{e}_r \ \mathbf{e}_\theta \ \mathbf{e}_\omega) \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right] \\
&= (\mathbf{e}_r \ \mathbf{e}_\theta \ \mathbf{e}_\omega) \cdot \begin{pmatrix} -\omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -(\omega^2 r) \mathbf{e}_r \cdots \cdots \cdots (4-3)
\end{aligned}$$

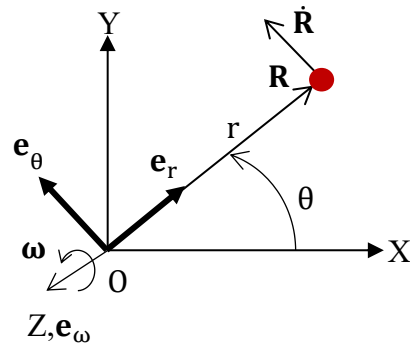


図 4-2 平面極座標系

5 非慣性系における運動方程式

式(4-1)の右辺第2項の方向余弦行列 $\mathbf{D}_R^I$ が掛かる中括弧内は非慣性系の回転座標系(R)で表現された加速度である。この回転座標系(R)に対する物体の運動方程式は、式(4-1)から加速度ベクトル $\ddot{\mathbf{r}}$ を導いて下記のように求められる。

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{D}_I^R \cdot \ddot{\mathbf{R}} - \mathbf{D}_I^R \cdot \ddot{\mathbf{d}} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \cdots \cdots (5-1)$$

ここで、 $\mathbf{D}_I^R : \mathbf{D}_R^I$ の転置行列で、回転座標系(R)における慣性座標系(I)の方向余弦行列
また、慣性座標系における運動方程式(4-1)は、質量と力を用いると下記のように表される。

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{F}}{m} \cdots \cdots (5-2)$$

ここで、 $\mathbf{F}$: 慣性座標系(I)における物体に作用する力(外力)ベクトル

m : 物体の質量

これを上記の式(5-1)に代入すると、非慣性系の回転座標系(R)に対する物体の運動方程式が下記のように求められる。

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{D}_I^R \cdot \frac{\mathbf{F}}{m} - \mathbf{D}_I^R \cdot \ddot{\mathbf{d}} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \cdots \cdots (5-3)$$

ここで、 $\mathbf{D}_I^R \cdot \frac{\mathbf{F}}{m}$: 外力 (による加速度)

$-\mathbf{D}_I^R \cdot \ddot{\mathbf{d}}$: 並進的加速度運動による慣性力 (による加速度)

$-2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}})$: コリオリの力 (による加速度)

$-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$: 遠心力 (による加速度)

$-\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$: オイラー力 (による加速度)

式(5-3)の右辺第1項は実際に物体に作用している外力で、慣性座標系(I)で表されている場合は回転座標系(R)に座標変換される。右辺第2項～第5項の4種の力は、外力以外の力、つまり、回転座標系原点の並進的運動と原点回りの回転運動によって発生した力で、式(5-2)と比較すれば分かるように、慣性系では現れない力である。この4種の力は非慣性系で物体の運動を記述したときの数式の上だけで現れ、実在しない「見かけの力」である。

簡単な例として、慣性系で示したのと同じ等速円運動について示す。回転座標系の回転は($\boldsymbol{\omega} = \text{一定}$ 、 $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$)で、回転座標系に対する物体の運動は($\mathbf{r} = \text{一定}$ 、 $\dot{\mathbf{r}} = 0$ 、 $\ddot{\mathbf{r}} = 0$)なので、式(5-3)は次のように表される(式導出の都合上、3次元で表現)。

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{D}_I^R \cdot \frac{\mathbf{F}}{m} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{D}_I^R \cdot \frac{\mathbf{F}}{m} - \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right] \\ &= \mathbf{D}_I^R \cdot \frac{\mathbf{F}}{m} + \begin{pmatrix} \omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \cdots (5-4) \end{aligned}$$

よって、外力 $[\mathbf{D}_I^R \cdot \mathbf{F}]$ は向心力($-\mathbf{e}_r$ 方向)でなければならない、見かけの力 $\omega^2 r$ (遠心力、 $\mathbf{e}_r$ 方向)とつり合うことになる。

6 見かけの力

(1) 非慣性系(R)における運動方程式に現れる、慣性系(I)では現れない。

$$\text{慣性系(I)} : \ddot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{F}_{(I)}}{m}$$

$$\text{非慣性系(R)} : \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}_{(R)}}{m} + (\text{見かけの力による加速度})$$

(2) 見かけの力は4種あり、下記のとおりである。

(a) 非慣性系の並進的加速度運動による見かけの力(1種)

① 並進的加速度運動による慣性力

(b) 非慣性系の回転運動による見かけの力(3種)

② コリオリの力

③ 遠心力

④ オイラー力

7 慣性系には実在する慣性力があるか

(1) 非慣性系におけるma

(a) ダランベールの原理では $[\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0]$ として、仮想の力 $[-m\mathbf{a}]$ が導入された。

(b) [仮想の力]は定義の上から[見かけの力]である。

(c) $m\mathbf{a}$ は慣性力と呼ばれる。

(2) 慣性系における $m\mathbf{a}$ は慣性力とは呼ばない？

(a) 慣性系で2物体の衝突を考えたとき、衝突の短時間に加速度 $\mathbf{a}$ が発生し、衝突された物体には衝突してきた物体の質量 m と加速度 $\mathbf{a}$ の積 $m\mathbf{a}$ が作用し、衝突してきた物体には $-m\mathbf{a}$ の反作用が働く、と考えることができる。

(b) 屋根から質量 m の雪の塊が速度 $\mathbf{v}$ で落下した場合の衝撃を考える。

$$m\mathbf{v} - m \cdot \mathbf{0} = \mathbf{F}\Delta t : \text{運動量の変化量は力積に等しい}$$

$$\mathbf{F}\Delta t : \text{力積}$$

この両辺を作用時間 Δt で割って、

$$m \frac{\mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{F}$$

よって、この衝突で作用した力は次のように表される。

$$\mathbf{F} = m \frac{\mathbf{v}}{\Delta t} = m\mathbf{a}$$

(3) [見かけの力の慣性力]と[実在する慣性力]があるか？

(a) 非慣性系における $m\mathbf{a}$ は見かけの力(慣性力)である。

(b) 慣性系における $m\mathbf{a}$ は実在する慣性力と呼んでもおかしくない。

(4) 同じ $m\mathbf{a}$ なのだから、慣性系における $m\mathbf{a}$ を[実在する慣性力]と呼んだ方が混乱しないのではないか。