四元数を次のように表現します。

$$\mathbf{Q} = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\underline{\mathbf{e}} = \mathrm{c} + \mathrm{s}\underline{\mathbf{e}} \quad \cdots\cdots (1)$$

$\underline{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$:オイラー軸(回転軸)ベクトル（単位ベクトル）

θ :オイラー軸まわりの回転角

$\mathrm{c} = \cos\frac{\theta}{2}$ 、 $\mathrm{s} = \sin\frac{\theta}{2}$

2 つの四元数の積は次のように表されます。

$\mathbf{Q}_1 = \mathrm{c}_1 + \mathrm{s}_1\underline{\mathbf{e}}_1$

$\mathbf{Q}_2 = \mathrm{c}_2 + \mathrm{s}_2\underline{\mathbf{e}}_2$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \otimes \mathbf{Q}_2 = (\mathrm{c}_1 + \mathrm{s}_1\underline{\mathbf{e}}_1) \otimes (\mathrm{c}_2 + \mathrm{s}_2\underline{\mathbf{e}}_2)$$
$$= \mathrm{c}_1\mathrm{c}_2 + c_2(\mathrm{s}_1\underline{\mathbf{e}}_1) + \mathrm{c}_1(\mathrm{s}_2\underline{\mathbf{e}}_2) + (\mathrm{s}_1\underline{\mathbf{e}}_1 \times \mathrm{s}_2\underline{\mathbf{e}}_2 - \mathrm{s}_1\underline{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathrm{s}_2\underline{\mathbf{e}}_2) \quad \cdots\cdots (2)$$

$\otimes$:四元数の乗算演算子

ベクトルと四元数の演算を行うには、ベクトルを四元数の実部をゼロと置いた形式で次のように表します。

$\mathbf{V} = 0 + \vec{\mathbf{v}}$

$\vec{\mathbf{v}}$:ベクトル

四元数によるベクトルの回転は次のように表されます。

$$\mathbf{V}' = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{V} \otimes \mathbf{Q}^* \quad \cdots\cdots (3)$$

$\mathbf{V}' = 0 + \vec{\mathbf{v}}'$

$\vec{\mathbf{v}}'$:回転後のベクトル

$\mathbf{Q}^* = \mathrm{c} - \mathrm{s}\underline{\mathbf{e}}$:共役四元数

四元数とベクトルの積は(2)式より、次のように表されます。

$$\mathbf{Q} \otimes \mathbf{V} = (\mathrm{c} + \mathrm{s}\underline{\mathbf{e}}) \otimes (0 + \vec{\mathbf{v}}) = -\mathrm{s}(\underline{\mathbf{e}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) + \mathrm{c}\vec{\mathbf{v}} + \mathrm{s}(\underline{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{v}})$$

これに共役四元数を乗じるには(2)式に次を代入して、

$\mathrm{c}_1 = -\mathrm{s}(\underline{\mathbf{e}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$

$\mathrm{s}_1\underline{\mathbf{e}}_1 = \mathrm{c}\vec{\mathbf{v}} + \mathrm{s}(\underline{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{v}})$

$\mathrm{c}_2 = \mathrm{c}$

$\mathrm{s}_2\underline{\mathbf{e}}_2 = -\mathrm{s}\underline{\mathbf{e}}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}' &= -\mathrm{s}(\underline{\mathbf{e}} \cdot \vec{\mathbf{v}})\mathrm{c} + \mathrm{c}\{\mathrm{c}\vec{\mathbf{v}} + \mathrm{s}(\underline{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{v}})\} - \mathrm{s}(\underline{\mathbf{e}} \cdot \vec{\mathbf{v}})(-\mathrm{s}\underline{\mathbf{e}}) \\
&\qquad + [\{\mathrm{c}\vec{\mathbf{v}} + \mathrm{s}(\underline{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{v}})\} \times (-\mathrm{s}\underline{\mathbf{e}}) - \{\mathrm{c}\vec{\mathbf{v}} + \mathrm{s}(\underline{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{v}})\} \cdot (-\mathrm{s}\underline{\mathbf{e}})] \\
&= -\mathrm{cs}(\underline{\mathbf{e}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) + \mathrm{c}^2\vec{\mathbf{v}} + \mathrm{cs}(\underline{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{v}}) + \mathrm{s}^2(\underline{\mathbf{e}} \cdot \vec{\mathbf{v}})\underline{\mathbf{e}} \\
&\qquad -\mathrm{cs}(\vec{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{e}}) - \mathrm{s}^2(\underline{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{v}}) \times \underline{\mathbf{e}} + \mathrm{cs}(\vec{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{e}}) + \mathrm{s}^2(\underline{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot \underline{\mathbf{e}} \\
&= \mathrm{c}^2\vec{\mathbf{v}} + \mathrm{cs}(\underline{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{v}}) + \mathrm{s}^2(\underline{\mathbf{e}} \cdot \vec{\mathbf{v}})\underline{\mathbf{e}} \\
&\qquad +\mathrm{cs}(\underline{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{v}}) + \mathrm{s}^2\underline{\mathbf{e}} \times (\underline{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{v}}) + \mathrm{s}^2(\underline{\mathbf{e}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot \underline{\mathbf{e}}
\end{aligned}$$

ここで次の公式を適用して変形します。

ベクトル 3 重積 $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ を変形した次式より、

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

$$(\underline{\mathbf{e}}\cdot\vec{\mathbf{v}})\underline{\mathbf{e}}=(\underline{\mathbf{e}}\cdot\underline{\mathbf{e}})\vec{\mathbf{v}}-\underline{\mathbf{e}}\times(\vec{\mathbf{v}}\times\underline{\mathbf{e}})=\vec{\mathbf{v}}+\underline{\mathbf{e}}\times(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})$$

スカラー3 重積 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$ より、

$$(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})\cdot\underline{\mathbf{e}}=(\underline{\mathbf{e}}\times\underline{\mathbf{e}})\cdot\vec{\mathbf{v}}=0$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}'&=\mathrm{c}^2\vec{\mathbf{v}}+\mathrm{cs}(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})+\mathrm{s}^2(\underline{\mathbf{e}}\cdot\vec{\mathbf{v}})\underline{\mathbf{e}}+\mathrm{cs}(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})+\mathrm{s}^2\underline{\mathbf{e}}\times(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})+\mathrm{s}^2(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})\cdot\underline{\mathbf{e}}\\&=\mathrm{c}^2\vec{\mathbf{v}}+\mathrm{cs}(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})+\mathrm{s}^2\{\vec{\mathbf{v}}+\underline{\mathbf{e}}\times(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})\}+\mathrm{cs}(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})+\mathrm{s}^2\underline{\mathbf{e}}\times(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})+0\\&=0+\vec{\mathbf{v}}+2\mathrm{cs}(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})+2\mathrm{s}^2\underline{\mathbf{e}}\times(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})\quad\cdots\cdots(4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}}'&=\vec{\mathbf{v}}+2\mathrm{cs}(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})+2\mathrm{s}^2\underline{\mathbf{e}}\times(\underline{\mathbf{e}}\times\vec{\mathbf{v}})\\&=\left\{\mathbf{1}+2\mathrm{cs}[\underline{\mathbf{e}}\times]+2\mathrm{s}^2[\underline{\mathbf{e}}\times]^2\right\}\cdot\vec{\mathbf{v}}\\&=\mathbf{D}\cdot\vec{\mathbf{v}}\quad\cdots\cdots(5)\end{aligned}$$

$$[\underline{\mathbf{e}}\times]=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{e_z}&\mathrm{e_y}\\\mathrm{e_z}&0&-\mathrm{e_x}\\-\mathrm{e_y}&\mathrm{e_x}&0\end{pmatrix}$$:歪対象行列

$$\mathbf{D}=\left\{\mathbf{1}+2\mathrm{cs}[\underline{\mathbf{e}}\times]+2\mathrm{s}^2[\underline{\mathbf{e}}\times]^2\right\}$$:方向余弦行列

四元数を次にように表すと、上記の方向余弦行列は次のように表されます。

$$\mathbf{Q}=\mathrm{q}_0+\begin{pmatrix}\mathrm{q}_1\\\mathrm{q}_2\\\mathrm{q}_3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathrm{q_0}^2+\mathrm{q_1}^2-\mathrm{q_2}^2-\mathrm{q_3}^2&2(\mathrm{q}_2\mathrm{q}_1-\mathrm{q}_0\mathrm{q}_3)&2(\mathrm{q}_3\mathrm{q}_1+\mathrm{q}_0\mathrm{q}_2)\\2(\mathrm{q}_1\mathrm{q}_2+\mathrm{q}_0\mathrm{q}_3)&\mathrm{q_0}^2-\mathrm{q_1}^2+\mathrm{q_2}^2-\mathrm{q_3}^2&2(\mathrm{q}_3\mathrm{q}_2-\mathrm{q}_0\mathrm{q}_1)\\2(\mathrm{q}_1\mathrm{q}_3-\mathrm{q}_0\mathrm{q}_2)&2(\mathrm{q}_2\mathrm{q}_3+\mathrm{q}_0\mathrm{q}_1)&\mathrm{q_0}^2-\mathrm{q_1}^2-\mathrm{q_2}^2+\mathrm{q_3}^2\end{pmatrix}\cdots\cdots(6)$$