質問内容

下図に示すような第１～第３リンクの長さが L_1， L_2， L_3 である RPP 型ロボットを考える．

(1) 図(a)に示す初期姿勢から θ_1， θ_2， θ_3 だけ各関節が回転した際の，ワールド座標系 $\Sigma_0 - X_0Y_0Z_0$ におけるロボット先端位置 G の座標 ${}^0\boldsymbol{G}$（3×1 の列ベクトル），およびロボットの姿勢を表す３つの直交する単位ベクトル ${}^0\boldsymbol{e}_x$， ${}^0\boldsymbol{e}_y$， ${}^0\boldsymbol{e}_z$（同）の成分を以下の過程に従い求めよ．ただし θ_1， θ_2， θ_3 の採り方は図(b)に準拠するものとする．

①Σ_0（前記ワールド座標系）， Σ_1（第１関節を原点とし， θ_1 回転後の座標系）， Σ_2（第２関節を原点とし， θ_2 回転後の座標系）， Σ_3（第３関節を原点とし， θ_3 回転後の座標系）， Σ_E（エンドエフェクタ（本問ではロボット先端）に設置した座標系）を考える．この時，各座標系間の同次変換行列 ${}^0\boldsymbol{T}_1$， ${}^1\boldsymbol{T}_2$， ${}^2\boldsymbol{T}_3$， ${}^3\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}$ を求めよ．

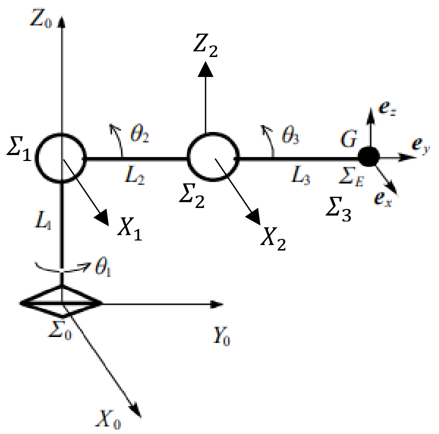
②設問①の結果を利用し，同次変換行列 ${}^0\boldsymbol{T}_{\mathrm{E}}$ を求めよ．

③設問②の結果を利用し， ${}^0\boldsymbol{G}$ を求めよ．

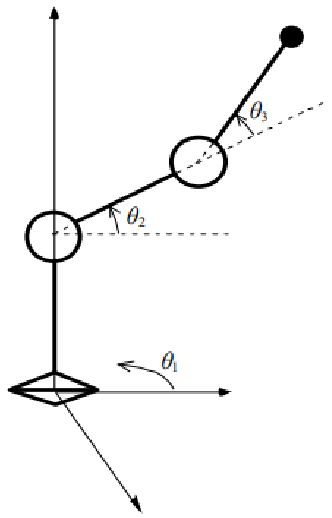
④設問②の結果を利用し， ${}^0\boldsymbol{e}_x$， ${}^0\boldsymbol{e}_y$， ${}^0\boldsymbol{e}_z$ を求めよ．

(2) 本ロボットにおいて，先端位置 ${}^0\boldsymbol{G}=(X, Y, Z)^T$ を実現するような $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$ を求めよ（逆運動学問題）．解が複数組あることに注意せよ．

(3) 本ロボットにおいて，先端に $(f_x, f_y, f_z)^T$ の力を発生させるために必要な，各関節のトルク $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)^T$ を求めよ．



(a) 初期姿勢



(b) 各関節角度の定義

(1) 同次変換行列

座標系(x_0, y_0, z_0)の軸方向単位ベクトルを次のように表します。

$\vec{e}_{x_0}$: x_0軸方向単位ベクトル

$\vec{e}_{y_0}$: y_0軸方向単位ベクトル

$\vec{e}_{z_0}$: z_0軸方向単位ベクトル

座標系(x_1, y_1, z_1)についても同様に表します。

座標系(x_0, y_0, z_0)を回転してできた座標系(x_1, y_1, z_1)は次のように表されます。

$\left(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1}\right) = \left(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0}\right) \cdot D_1^0$:座標系の回転・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(1)

D_1^0 :回転行列

座標系(x_1, y_1, z_1)で表したベクトルを座標系(x_0, y_0, z_0)から見たベクトルに座標変換するのは、次のように表されます。

$\vec{a}^0 = D_1^0 \cdot \vec{a}^1$:ベクトルの座標変換・・(2)

$\vec{a}^0$:座標系(x_0, y_0, z_0)で表したベクトル

$\vec{a}^1$:座標系(x_1, y_1, z_1)で表したベクトル

また、座標系(x_0, y_0, z_0)から(x_1, y_1, z_1)への座標系の回転と同じ回転をベクトルに与える場合は、次のように表されます。回転後のベクトルも座標系(x_0, y_0, z_0)で表したベクトルです。

$\vec{b}^0 = D_1^0 \cdot \vec{a}^0$:ベクトルの回転・・・(3)

$\vec{a}^0$:座標系(x_0, y_0, z_0)で表したベクトル

$\vec{b}^0$:座標系(x_0, y_0, z_0)で表した回転後のベクトル

座標系(x_1, y_1, z_1)で表したベクトル（座標点）は、座標系(x_0, y_0, z_0)から見ると原点の平行移動量を加えたのち、座標変換して表されます。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = D_1^0 \cdot \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_{x_1} \\ L_{y_1} \\ L_{z_1} \end{pmatrix} \right\} = D_1^0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + D_1^0 \cdot \begin{pmatrix} L_{x_1} \\ L_{y_1} \\ L_{z_1} \end{pmatrix} \cdots\cdots (4)$$

D_1^0 :回転行列（座標変換行列）

$$\begin{pmatrix} s_{x_1} \\ s_{y_1} \\ s_{z_1} \end{pmatrix} = D_1^0 \cdot \begin{pmatrix} L_{x_1} \\ L_{y_1} \\ L_{z_1} \end{pmatrix} \text{ :平行移動量} \cdots\cdots (5)$$

これを一つの行列で表したのが同次変換行列で、平行移動の演算が行えるように 4 次元に拡張します。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & s_{x_1} \\ & \{D_1^0\} & & s_{y_1} \\ & & & s_{z_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = T_1^0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots (6)$$

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} & & & s_{x_1} \\ & \{D_1^0\} & & s_{y_1} \\ & & & s_{z_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ :同次変換行列} \cdots\cdots (7)$$

(1)-①

Σ1 のベクトル（座標点）を平行移動したのち座標変換してΣ0 に移す同次変換行列は次のように表されます。

$$D_1^0 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ：Σ1 からΣ0 への座標変換行列・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(8)

$$\begin{pmatrix} s_{x_1} \\ s_{y_1} \\ s_{z_1} \end{pmatrix} = D_1^0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{pmatrix}$$ ：Σ1 の平行移動量

$$T_1^0 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ：Σ1 からΣ0 への同次変換行列・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(9)

同様に、

$$D_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$ ：Σ2 からΣ1 への座標変換行列・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(10)

$$\begin{pmatrix} s_{x_2} \\ s_{y_2} \\ s_{z_2} \end{pmatrix} = D_2^1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ L_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ L_2\cos\theta_2 \\ L_2\sin\theta_2 \end{pmatrix}$$ ：Σ2 の平行移動量

$$T_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & L_2\cos\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & L_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ：Σ2 からΣ1 への同次変換行列・・・・・・・・・・・・・・(11)

$$D_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ 0 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix}$$ ：Σ3 からΣ2 への座標変換行列・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(12)

$$\begin{pmatrix} s_{x_3} \\ s_{y_3} \\ s_{z_3} \end{pmatrix} = D_3^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ L_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ L_3\cos\theta_3 \\ L_3\sin\theta_3 \end{pmatrix}$$ ：Σ3 の平行移動量

$$T_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & L_3\cos\theta_3 \\ 0 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & L_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ：Σ3 からΣ2 への同次変換行列・・・・・・・・・・・・・・(13)

ΣE とΣ3 は同じなので、

$$D_E^2 = D_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ 0 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix}$$ ：ΣE からΣ2 への座標変換行列・・・・・・・・・・・・・・・・・・(14)

$$T_E^2 = T_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & L_3\cos\theta_3 \\ 0 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & L_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ：ΣE からΣ2 への同次変換行列・・・・・・・・(15)

(1)-②

同次変換行列を用いた座標変換は式(6)に示したように表され、これに順次、次の座標の変換を適用すると、

$$
\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_1^0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2 \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_E^2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
T_E^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_E^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & L_2\cos\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & L_2\sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & L_3\cos\theta_3 \\ 0 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & L_3\sin\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_2+\theta_3) & L_2\cos\theta_2 + L_3(\cos\theta_2\cos\theta_3 - \sin\theta_2\sin\theta_3) \\ 0 & \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) & L_2\sin\theta_2 + L_3(\sin\theta_2\cos\theta_3 + \cos\theta_2\sin\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_2+\theta_3) & L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) & L_2\sin\theta_2 + L_3\sin(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1\cos(\theta_2+\theta_3) & \sin\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) & -\sin\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\} \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\cos(\theta_2+\theta_3) & -\cos\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) & \cos\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\} \\ 0 & \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) & L_1 + L_2\sin\theta_2 + L_3\sin(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

(1)-③

$$
G^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$: ΣE で表した点 G の座標点

$$
G^0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = T_E^0 \cdot G^E
$$

$$
= \begin{pmatrix} -\sin\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\} \\ \cos\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\} \\ L_1 + L_2\sin\theta_2 + L_3\sin(\theta_2+\theta_3) \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\} \\ \cos\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\} \\ L_1 + L_2\sin\theta_2 + L_3\sin(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix}
$$: Σ0 で表した点 G の座標点・・・・・・・・・・・・(17)

(1)-④

座標系(x_1, y_1, z_1)を回転してできた座標系(x_2, y_2, z_2)は次のように表されます。

$\left(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2}\right) = \left(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1}\right) \cdot D_2^1$:座標系の回転

これに式(1)の$\left(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1}\right)$を代入すると、

$$\begin{aligned}\left(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2}\right) &= \left(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0}\right) \cdot D_1^0 \cdot D_2^1 \\ &= \left(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0}\right) \cdot D_2^0 \quad \text{:座標系の回転}\end{aligned}$$

$D_2^0 = D_1^0 \cdot D_2^1$:座標系(x_0, y_0, z_0)から(x_2, y_2, z_2)への回転行列

この回転を次の座標系にも適用すると、

$$\left(\vec{e}_{x_3}, \vec{e}_{y_3}, \vec{e}_{z_3}\right) = \left(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2}\right) \cdot D_3^2 = \left(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0}\right) \cdot D_1^0 \cdot D_2^1 \cdot D_3^2$$

$$\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right) = \left(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0}\right) \cdot D_1^0 \cdot D_2^1 \cdot D_E^2 = \left(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0}\right) \cdot D_E^0$$

$$\left(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0}\right)^T \cdot \left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right) = D_E^0$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_{x_0} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{x_0} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{x_0} \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_{y_0} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{y_0} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{y_0} \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_{z_0} \cdot \vec{e}_x & \vec{e}_{z_0} \cdot \vec{e}_y & \vec{e}_{z_0} \cdot \vec{e}_z \end{pmatrix} = D_E^0 \cdots\cdots (18)$$

上記左辺の行列は 1 列目がΣ0 座標系(x_0, y_0, z_0)から見たΣE 座標系(x, y, z)のx軸単位ベクトル$\vec{e}_x$を、同様に 2 列目がy軸単位ベクトル$\vec{e}_y$を、3 列目がz軸単位ベクトル$\vec{e}_z$を表します。

$$\left(\vec{e}_x^0, \vec{e}_y^0, \vec{e}_z^0\right) = D_E^0 \cdots\cdots (19)$$

$$\begin{aligned} D_E^0 &= D_1^0 \cdot D_2^1 \cdot D_E^2 \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 \\ 0 & \sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_2+\theta_3) & -\sin(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1\cos(\theta_2+\theta_3) & \sin\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\cos(\theta_2+\theta_3) & -\cos\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & \sin(\theta_2+\theta_3) & \cos(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix} \cdots\cdots (20) \end{aligned}$$

よって、Σ0 から見たΣE の各軸方向単位ベクトルは次のように表されます。

$$\vec{e}_x^0 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots (21)$$

$$\vec{e}_y^0 = \begin{pmatrix} -\sin\theta_1\cos(\theta_2+\theta_3) \\ \cos\theta_1\cos(\theta_2+\theta_3) \\ \sin(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix} \cdots\cdots (22)$$

$$\vec{e}_z^0 = \begin{pmatrix} \sin\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) \\ -\cos\theta_1\sin(\theta_2+\theta_3) \\ \cos(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix} \cdots\cdots (23)$$

(2)

$$G^0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\} \\ \cos\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\} \\ L_1 + L_2\sin\theta_2 + L_3\sin(\theta_2+\theta_3) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\} \\ \cos\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\} \\ L_1 + L_2\sin\theta_2 + L_3\sin(\theta_2+\theta_3) \end{pmatrix}$$:エンドエフェクタの位置ベクトル（式(17)）

上記位置ベクトルとなる角度は、以下のように求められます。

$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{-x_0}{y_0}\right)$:第 1 関節の回転角･･･(24)

$\cos\theta_1 = 0$の場合、

$$\frac{-x_0}{\sin\theta_1} = L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)$$

$$z_0 - L_1 = L_2\sin\theta_2 + L_3\sin(\theta_2+\theta_3)$$

右辺第 1 項を左辺に移行して、

$$\frac{-x_0}{\sin\theta_1} - L_2\cos\theta_2 = L_3\cos(\theta_2+\theta_3)$$

$$(z_0 - L_1) - L_2\sin\theta_2 = L_3\sin(\theta_2+\theta_3)$$

両辺を 2 乗して、

$$\left(\frac{-x_0}{\sin\theta_1}\right)^2 - 2\left(\frac{-x_0}{\sin\theta_1}\right)L_2\cos\theta_2 + {L_2}^2\cos^2\theta_2 = {L_3}^2\cos^2(\theta_2+\theta_3)$$

$$(z_0 - L_1)^2 - 2(z_0 - L_1)L_2\sin\theta_2 + {L_2}^2\sin^2\theta_2 = {L_3}^2\sin^2(\theta_2+\theta_3)$$

両辺をそれぞれ加算して、

$$\left(\frac{-x_0}{\sin\theta_1}\right)^2 - 2\left(\frac{-x_0}{\sin\theta_1}\right)L_2\cos\theta_2 + (z_0 - L_1)^2 - 2(z_0 - L_1)L_2\sin\theta_2 + {L_2}^2 = {L_3}^2$$

$$\left(\frac{-x_0}{\sin\theta_1}\right)\cos\theta_2 + (z_0 - L_1)\sin\theta_2 = \frac{1}{2L_2}\left\{\left(\frac{-x_0}{\sin\theta_1}\right)^2 + {L_2}^2 - {L_3}^2 + (z_0 - L_1)^2\right\}$$

左辺は三角関数の合成公式を用いて、

$$\sqrt{\left(\frac{x_0}{\sin\theta_1}\right)^2 + (z_0 - L_1)^2}\cos(\theta_2 - \beta) = \frac{1}{2L_2}\left\{\left(\frac{x_0}{\sin\theta_1}\right)^2 + {L_2}^2 - {L_3}^2 + (z_0 - L_1)^2\right\}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{(z_0 - L_1)}{\frac{-x_0}{\sin\theta_1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta_1(z_0 - L_1)}{-x_0}\right)$$

これをθ_2について解くと、

$$\theta_2 - \beta = \cos^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2L_2}\left\{\left(\frac{x_0}{\sin\theta_1}\right)^2 + {L_2}^2 - {L_3}^2 + (z_0 - L_1)^2\right\}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{\sin\theta_1}\right)^2 + (z_0 - L_1)^2}}\right\}$$

$\theta_2 = \cos^{-1}\left\{\frac{{x_0}^2 + \sin^2\theta_1\{{L_2}^2 - {L_3}^2 + (z_0 - L_1)^2\}}{2L_2\sin\theta_1\sqrt{{x_0}^2 + \sin^2\theta_1(z_0 - L_1)^2}}\right\} + \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta_1(z_0 - L_1)}{-x_0}\right)$･･･････････(25)

θ_2が求まったら下記より、

$$\frac{-x_0}{\sin\theta_1} - L_2\cos\theta_2 = L_3\cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$z_0 - L_1 - L_2\sin\theta_2 = L_3\sin(\theta_2 + \theta_3)$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{z_0 - L_1 - L_2\sin\theta_2}{\frac{-x_0}{\sin\theta_1} - L_2\cos\theta_2}\right) - \theta_2 \cdots\cdots (26)$$

$\sin\theta_1 = 0$の場合、

$$\frac{y_0}{\cos\theta_1} = L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$z_0 - L_1 = L_2\sin\theta_2 + L_3\sin(\theta_2 + \theta_3)$$

以下、同様に、

$$\sqrt{\left(\frac{y_0}{\cos\theta_1}\right)^2 + (z_0 - L_1)^2}\cos(\theta_2 - \beta) = \frac{1}{2L_2}\left\{\left(\frac{y_0}{\cos\theta_1}\right)^2 + {L_2}^2 - {L_3}^2 + (z_0 - L_1)^2\right\}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta_1(z_0 - L_1)}{y_0}\right)$$

$$\theta_2 = \cos^{-1}\left\{\frac{{y_0}^2 + \cos^2\theta_1\{{L_2}^2 - {L_3}^2 + (z_0 - L_1)^2\}}{2L_2\cos\theta_1\sqrt{{y_0}^2 + \cos^2\theta_1(z_0 - L_1)^2}}\right\} + \tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta_1(z_0 - L_1)}{y_0}\right) \cdots\cdots (27)$$

θ_2が求まったら下記より、

$$\frac{y_0}{\cos\theta_1} - L_2\cos\theta_2 = L_3\cos(\theta_2 + \theta_3)$$

$$z_0 - L_1 - L_2\sin\theta_2 = L_3\sin(\theta_2 + \theta_3)$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{z_0 - L_1 - L_2\sin\theta_2}{\frac{y_0}{\cos\theta_1} - L_2\cos\theta_2}\right) - \theta_2 \cdots\cdots (28)$$

(3)

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2 + \theta_3)\} \\ \cos\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2 + \theta_3)\} \\ L_1 + L_2\sin\theta_2 + L_3\sin(\theta_2 + \theta_3) \end{pmatrix}$$:エンドエフェクタの位置ベクトル（式(17)）

位置の式が 3 個、変数（角度）が 3 個なので、ヤコビ行列は 3×3 の大きさとなります。

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial\theta_1} & \frac{\partial x_0}{\partial\theta_2} & \frac{\partial x_0}{\partial\theta_3} \\ \frac{\partial y_0}{\partial\theta_1} & \frac{\partial y_0}{\partial\theta_2} & \frac{\partial y_0}{\partial\theta_3} \\ \frac{\partial z_0}{\partial\theta_1} & \frac{\partial z_0}{\partial\theta_2} & \frac{\partial z_0}{\partial\theta_3} \end{pmatrix}$$:ヤコビ行列$\cdots\cdots$(28)

$$= \begin{pmatrix} -\cos\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2 + \theta_3)\} & -\sin\theta_1\{-L_2\sin\theta_2 - L_3\sin(\theta_2 + \theta_3)\} & -\sin\theta_1\{L_2\cos\theta_2 - L_3\sin(\theta_2 + \theta_3)\} \\ -\sin\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2 + \theta_3)\} & \cos\theta_1\{-L_2\sin\theta_2 - L_3\sin(\theta_2 + \theta_3)\} & \cos\theta_1\{L_2\cos\theta_2 - L_3\sin(\theta_2 + \theta_3)\} \\ 0 & L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2 + \theta_3) & L_2\sin\theta_2 + L_3\cos(\theta_2 + \theta_3) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$ **:**エンドエフェクタが必要とする力

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}$$ ：各関節で必要なトルク

$$= \begin{pmatrix} -\cos\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\}f_x - \sin\theta_1\{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\}f_y \\ -\sin\theta_1\{-L_2\sin\theta_2 - L_3\sin(\theta_2+\theta_3)\}f_x + \cos\theta_1\{-L_2\sin\theta_2 - L_3\sin(\theta_2+\theta_3)\}f_y + \{L_2\cos\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\}f_z \\ -\sin\theta_1\{L_2\cos\theta_2 - L_3\sin(\theta_2+\theta_3)\}f_x + \cos\theta_1\{L_2\cos\theta_2 - L_3\sin(\theta_2+\theta_3)\}f_y + \{L_2\sin\theta_2 + L_3\cos(\theta_2+\theta_3)\}f_z \end{pmatrix}$$