(1) 同次座標変換行列

3 次元座標系において、x,y,z 各軸まわりの回転行列は次のように表されます。

$$[\varphi,x]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi\\ 0 & sin\varphi & cos\varphi\end{pmatrix}$$:x 軸まわり回転行列・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・①

$$[\theta,y]=\begin{pmatrix}cos\theta & 0 & sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -sin\theta & 0 & cos\theta\end{pmatrix}$$:y 軸まわり回転行列・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・②

$$[\psi,z]=\begin{pmatrix}cos\psi & -sin\psi & 0\\ sin\psi & cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$:z 軸まわり回転行列・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・③

座標点を x 軸まわりに回転したのち、平行移動する演算は次のように表されます。

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi\\ 0 & sin\varphi & cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t_x\\ t_y\\ t_z\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}t_x\\ t_y\\ t_z\end{pmatrix}$:平行移動量

この回転と平行移動の演算を一つの行列で行えるように、次のように 4 次元に拡張します。

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & t_x\\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi & t_y\\ 0 & sin\varphi & cos\varphi & t_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix}$$

画像などの座標点は次々と繰り返し変換操作が適用されるので、上記の演算結果も 4 次元で得られるように拡張します。

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & t_x\\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi & t_y\\ 0 & sin\varphi & cos\varphi & t_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix}$$ ・・・④

この行列は同次座標変換行列と呼ばれます。回転は y,z 軸とも同様です。

同次座標変換行列を用いた座標点の変換操作を次のように表します。

$$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\\ 1\end{pmatrix}=D_1\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix}$$

上記で変換された座標点にさらに別の同次座標変換行列で変換操作を加えると、

$$\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\\ 1\end{pmatrix}=D_2\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\\ 1\end{pmatrix}=D_2\cdot D_1\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{pmatrix}$$

これを拡張して、次々と変換操作を加える演算は次のように表されます。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{pmatrix} = D_n \cdots\cdots D_2 \cdot D_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

このように、 変換操作の順に右から左に同次座標変換行列が並びます。

平行移動のみを行う同次変換行列は、上記④式において回転角ゼロ（ϕ=0）として次のように表されます。

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$:平行移動の同次座標変換行列・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・⑥

また、回転のみを行う同次座標変換行列は、上記④式において平行移動量をゼロとして次のように表されます。

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$:回転変換の同次座標変換行列・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・⑦

(2) 問題

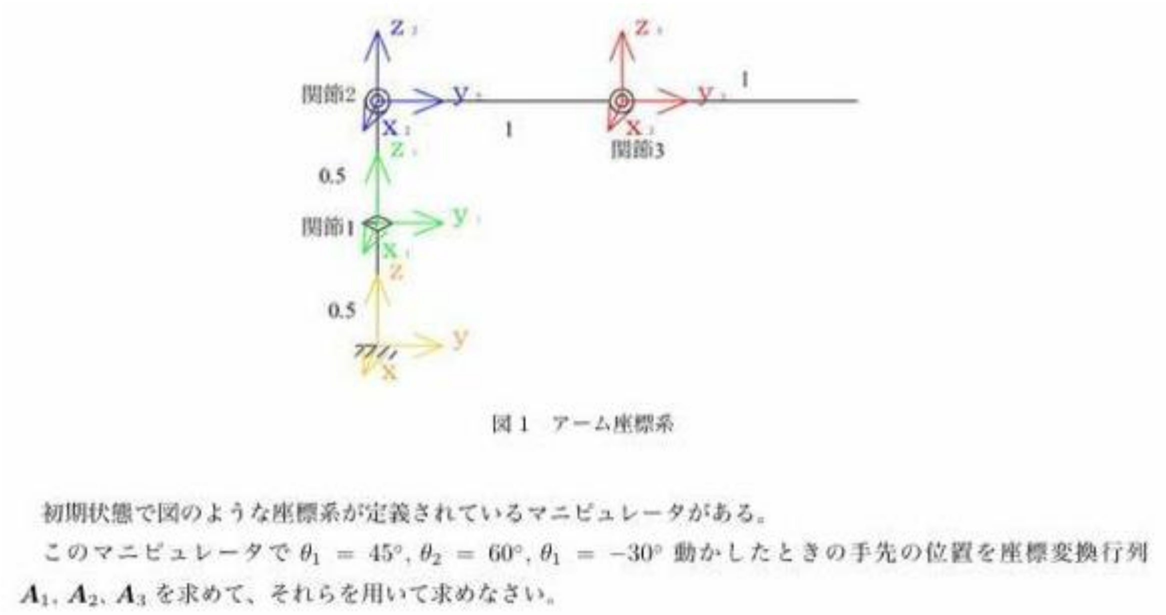

図1　アーム座標系

『初期状態で図のような座標系が定義されているマニピュレータがある。 このマニュピレータでθ1＝45°、θ2=60°、θ3=-30°動かした時の手先の位置を座標変換行列 A1,A2,A3 を求めて、それらを用いて求めなさい』

(a) 基盤の z 軸方向に 0.5 平行移動した関節 1 を z1 軸まわりに θ 1=45° 回転する同次座標変換行列は、

$$T_{1B}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0.5\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$:基盤から関節 1 への平行移動

$$R_{1B}=\begin{pmatrix}cos\theta_1&-sin\theta_1&0&0\\sin\theta_1&cos\theta_1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$:基盤から関節 1 への回転

$$A_1=R_{1B}\cdot T_{1B}=\begin{pmatrix}cos\theta_1&-sin\theta_1&0&0\\sin\theta_1&cos\theta_1&0&0\\0&0&1&0.5\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}&0&0\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}&0&0\\0&0&1&0.5\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(b) 関節 1 の z1 軸方向に 0.5 平行移動した関節 2 を x2 軸まわりに θ 2=60° 回転する同次座標変換行列は、

$$T_{21}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0.5\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$:関節 1 から関節 2 への平行移動

$$R_{21}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&cos\theta_2&-sin\theta_2&0\\0&sin\theta_2&cos\theta_2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$:関節 1 から関節 2 への回転

$$A_2=R_{21}\cdot T_{21}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&cos\theta_2&-sin\theta_2&-0.5sin\theta_2\\0&sin\theta_2&cos\theta_2&0.5cos\theta_2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1/2&-\sqrt{3}/2&-\sqrt{3}/4\\0&\sqrt{3}/2&1/2&1/4\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(c) 関節 2 の y2 軸方向に 1 平行移動した関節 3 を x3 軸まわりに θ 3=－30° 回転する同次座標変換行列は、

$$T_{32}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$:関節 2 から関節 3 への平行移動

$$R_{32}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&cos\theta_3&-sin\theta_3&0\\0&sin\theta_3&cos\theta_3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$:関節 2 から関節 3 への回転

$$A_3=R_{32}\cdot T_{32}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&cos\theta_3&-sin\theta_3&cos\theta_3\\0&sin\theta_3&cos\theta_3&sin\theta_3\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\sqrt{3}/2&1/2&\sqrt{3}/2\\0&-1/2&\sqrt{3}/2&-1/2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(d) 関節 3 の y3 軸方向に 1 平行移動した手先

$$T_{H3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$:関節 3 から手先への平行移動

$$A_H = T_{H3} \cdot A_3 \cdot A_2 \cdot A_1$$:基盤から手先への同次座標変換行列

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1+\sqrt{3}/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 1-1/4+\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/4-1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/(2\sqrt{2}) & \sqrt{3}/(2\sqrt{2}) & -1/2 & 1-1/2+\sqrt{3}/2 \\ 1/(2\sqrt{2}) & 1/(2\sqrt{2}) & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2-1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

添付画像の図 1 の下に示されている問の内容では、関節 1 と関節 2 の回転の後に関節 1 で θ 1=－30° 回転することが求められているように見えます。この場合は次のようになります。

関節 2 の回転の後に関節 1 で回転する場合、関節 2 の姿勢から関節 1 の姿勢に戻して（原点は動かさず）回転し、その後関節 2 の姿勢に戻します。

関節 2 から関節 1 へ姿勢を戻す回転は次のようにR_{21}の逆行列（回転行列は正則行列なので転置行列に等しい）で表されます。

$$R_{12} = {R_{21}}^{-1} = {R_{21}}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta_2 & -sin\theta_2 & 0 \\ 0 & sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta_2 & sin\theta_2 & 0 \\ 0 & -sin\theta_2 & cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$:関節 2 から関節 1 への回転

次に関節 1 の z1 軸まわりにθ1=－30° 回転したのち、

$$R_{1B} = \begin{pmatrix} cos\theta_1 & -sin\theta_1 & 0 & 0 \\ sin\theta_1 & cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$:基盤から関節 1 への回転

R_{21}で回転して元の座標に戻します。

この場合、関節 2 から関節 3 への回転は行っていないので平行移動のみ行って、手先は次のように表されます。

$$A_H = T_{H3} \cdot T_{32} \cdot R_{21} \cdot R_{1B} \cdot R_{12} \cdot A_2 \cdot A_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & \sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/2 & 2 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/4 & \sqrt{3}/4 & 0 \\ -1/4 & \sqrt{3}/8 + 3/4 & 3/8 - \sqrt{3}/4 & 2 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/8 - \sqrt{3}/4 & 3\sqrt{3}/8 + 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & \sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/2 & 2 - \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/4 & \sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/2 & 2 - \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 + \sqrt{2}/4 & -\sqrt{6}/4 + \sqrt{2}/4 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/8 + \sqrt{6}/8 & \sqrt{2}/8 + \sqrt{6}/8 & -\sqrt{3}/2 & 2 - \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{6}/8 + 3\sqrt{2}/8 & \sqrt{6}/8 + 3\sqrt{2}/8 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$