質問内容

---

(1) 異なるアフィン変換を組み合わせることも可能である。この場合には変換行列の組合せになる。例えば、座標を(3,2)だけ移動し(x 方向に 3, y 方向に 2 移動し)、その後に 45 度回転させたい場合は、移動行列 T および回転行列 R を式(1)のように定義、掛けることで実現できる

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{RT}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45 & -sin45 & 0 \\ sin45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

逆に、45 度回転させたのちに、座標を(3,2)だけ移動したい(x 方向に 3, y 方向に 2 移動したい)場合は、移動行列 T および回転行列 R を式(2)のように定義、掛けることで実現できる

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{TR}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 45 & -sin45 & 0 \\ sin45 & \cos 45 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

移動後回転するのと回転後移動するのでは変換結果が違うだろうと、何となく想像できる。これは本当だろうか。ある座標$(x, y) = (1,0)$について、式(1)と式(2)による変換結果値$(x', y')$を比べることで、式(1)と式(2)では異なる変換になることを示しなさい(式 1 による変換値と式 2 による変換値を明示すること)。

(2) 先ほど書いた通り、上記回転行列は原点を中心とした回転式となっている。座標$(x, y)$について、座標$(p, q)$を中心としてθ度だけ回転するためには、

① $(x, y)$を$(-p, -q)$だけ移動(回転中心を原点に移動)

② θ度回転

③ $(x, y)$を$(p, q)$だけ移動(①で移動した分を戻す)

ということを行う必要がある。これは式(3)の通り書ける。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{RT}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -p \\ 0 & 1 & -q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

座標(1,1)を、(4,3)を中心に 45 度回転した結果の座標を答えなさい。ただし、導出の過程をすべて丁寧に書きなさい。なお、sin45° および cos45° はどちらも 0.7 として計算すること。

# 同次変換行列

2 次元座標系において、原点まわりの回転変換は次のように表されます。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots ①$$

回転変換したのち平行移動する演算は次のように表されます。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots ②$$

これを一つの行列で表したのが同次変換行列で、平行移動の演算が行えるように 3 次元に拡張します。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & d_x \\ \sin\theta & \cos\theta & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots ③$$

同次変換行列の要素を変えればいろいろな変換ができるので、これを次のように表します。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = D_1 \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots ④$$

上記で変換された座標点にさらに別の同次変換行列で変換操作を加えると、

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = D_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = D_2 \cdot D_1 \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

これを拡張して、次々と変換操作を加える演算は次のように表されます。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = D_n \cdots\cdots D_2 \cdot D_1 \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots ⑥$$

このように、 変換操作の順に右から左に同次変換行列が並びます。

(0) 単一変換操作の同次変換行列

平行移動のみを行う同次変換行列は、上記③式において回転角ゼロ（$\theta=0$）として次のように表されます。

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ :平行移動の同次変換行列………⑦

また回転のみを行う同次変換行列は、上記③式において平行移動量をゼロとして次のように表されます。

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ :回転変換の同次変換行列………⑧

(1) 平行移動と回転変換

平行移動したのち回転変換する同次変換行列は次のようになります。

$$D_{RT} = R \cdot T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & d_x\cos\theta - d_y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & d_x\sin\theta + d_y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots ⑨$$

これは②式と同様に表すと次のようになり、平行移動量が回転変換されています。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 + d_x \\ y_0 + d_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_x\cos\theta - d_y\sin\theta \\ d_x\sin\theta + d_y\cos\theta \end{pmatrix} \cdots\cdots ⑩$$

回転変換したのち平行移動する同次変換行列は次のようになります。

$$D_{TR} = T \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & d_x \\ \sin\theta & \cos\theta & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots ⑪$$

同次変換行列に具体的な数値を代入して変換操作の順序が異なるときの様子を比較します。

回転角 $\theta$ ＝45°、sin45° ＝0.7、cos45° ＝0.7

平行移動量 $d_x$＝3、$d_y$＝2

座標点 $x_0$＝1，$y_0$＝0

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & d_x\cos\theta - d_y\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & d_x\sin\theta + d_y\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.7 & -0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 4.2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ :平行移動したのち回転変換

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & d_x \\ \sin\theta & \cos\theta & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.7 & -0.7 & 3 \\ 0.7 & 0.7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.7 \\ 2.7 \\ 1 \end{pmatrix}$$ :回転変換したのち平行移動

(2) 任意の座標点まわりの回転変換

座標点(p,q)まわりに $\theta$ 回転する操作は次のように求められます。

最初に座標点(p,q)を原点(0,0)に移動させるため(-p,-q)だけ平行移動します。次に原点まわりに角度 $\theta$ の回転変換を行った後、原点(0,0)を(p,q)だけ平行移動して戻します。

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & -p\\ 0 & 1 & -q\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ :最初の平行移動

$$R=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ :2 番目の回転変換

$$T'=\begin{pmatrix}1 & 0 & p\\ 0 & 1 & q\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ :最後の平行移動

次のデータを用いて変換過程を示します。

回転角 $\theta$ ＝45°、sin45°＝0.7、cos45°＝0.7

平行移動量 p＝4、q＝3

座標点 $x_0$＝1, $y_0$＝1

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ 1\end{pmatrix} &= T'\cdot R\cdot T\cdot\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ 1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1 & 0 & p\\ 0 & 1 & q\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -p\\ 0 & 1 & -q\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ 1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & p\\ \sin\theta & \cos\theta & q\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -p\\ 0 & 1 & -q\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ 1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & -p\cos\theta+q\sin\theta+p\\ \sin\theta & \cos\theta & -p\sin\theta-q\cos\theta+q\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ 1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}x_0\cos\theta-y_0\sin\theta-p\cos\theta+q\sin\theta+p\\ x_0\sin\theta+y_0\cos\theta-p\sin\theta-q\cos\theta+q\\ 1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}0.7-0.7-2.8+2.1+4\\ 0.7+0.7-2.8-2.1+3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.3\\ -0.5\\ 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

同次変換行列において、逆変換操作の関係にある行列は次のように表されます。

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0 & d_x\\ 0 & 1 & d_y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ :平行移動(dx,dy)

$$T'=T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & d_x\\ 0 & 1 & d_y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -d_x\\ 0 & 1 & -d_y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ :逆方向平行移動(-dx,-dy)

$$R=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ :回転（$\theta$）

$$R'=R^{-1}=R^{T}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ :逆回転（-$\theta$）

上付き”-1”は逆行列を、上付き”T”は転置行列を表す。